

研究の概要

本研究では、数学の授業で行われる思考の相互交流をコミュニケーションの観点からとらえ、その際に必要となる表現力についての指導の工夫を探った。その結果、表現様式のみ換えの指導を中心とした手だてを段階的に行うことは、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるために有効であり、数学的コミュニケーションにおける表現力を高める指導として効果があることが分かった。

キーワード 中学校数学、数学的コミュニケーション、表現力、表現様式、のみ換え、文字の式

主題設定の理由

数学の授業で行われる問題解決的な学習の場面では、話し合い、練り上げなどにおいて、問題解決における自分の考え方をお互いに交流する中で、内容の理解を深めたり、数学的な考え方を高めたりする指導が行われている。しかし、このような思考の相互交流の場面において、数学的表現を効果的に使って自分の考え方を相手に分かりやすく伝えることができない生徒が多い。

中学校学習指導要領解説数学編には、中学校数学科の目標の改善として、「数学の学習は、単に問題を解いて答えを求めるということだけではない。（中略）粘り強く考え続け考えたことを相手に分かるように説明したり表現したりする論理的な思考力や表現力も大切にすることがある。」と示されている¹⁾。しかし、現在、授業において行われている表現力の指導を振り返ってみると、「計算途中の式が正しくかける」「グラフがきまりにしたがってかける」といった技能面の習得ばかりに重点が置かれ、それらをどのように使って自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるかというコミュニケーションの観点からとらえた表現力の指導はあまり行われていないのが現状である。

そこで、本研究では、数学の授業で行われる思考の相互交流を「数学的コミュニケーション」としてとらえ、その場面において、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるために数学的表現を効果的に使って表現する力を「数学的コミュニケーションにおける表現力」とし、これを高めるための指導の工夫について探ることとした。

研究の目的

生徒の数学的コミュニケーションにおける表現の実態について明らかにし、授業実践を通して、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるために数学的表現を効果的に使って表現する力を高める指導の工夫について探る。

研究の内容

1 数学における表現様式

数学教育では、言葉や式、図、表、グラフなど様々な表現方法が用いられる。中原（1995）は、これらの表現方法を五つの表現様式として分類している。表1はそれぞれの内容についてまとめたものである。

これらのうち、現実的表現、操作的表現については、実物や教具が必要となり、生徒が自分の考え方を相手に伝える際に、いつも用いることができる状況にあるとは限らない。しかも、中学校においては取り扱

表1 五つの表現様式

表現様式	内容
現実的表現	実際の状況、実物による表現
操作的表現	教具の動的操作による表現
図的表現	絵、図、グラフなどによる表現
言語的表現	日常言語や数学に関する用語を用いた表現
記号的表現	数字、文字、演算記号などを用いた表現

う内容がより抽象的になるため，現実的表現，操作的表現は図的表現に置き換えて用いられていることが多い。したがって，本研究では，図的表現，言語的表現，記号的表現の三つの表現様式に焦点を当て，研究を進めることとした。

2 指導の視点と手だて

(1) 実態調査

ねらい：生徒の数学的コミュニケーションにおける表現の様子について調査，分析を行い，その実態を明らかにする中で，数学的コミュニケーションにおける表現力を高める指導の視点とその有効な手だてについて考える手掛かりとする。

対象：玉野市立荘内中学校 第1学年 4学級 132名

調査内容：問題（図1）について，まず，自分の考え方を他の生徒に分かるようにかき表し，それを基に5，6人の班で数学的コミュニケーションを行っている場面から，生徒の数学的コミュニケーションにおける表現の様子について調査，分析する。

次の問題について，自分の考え方の説明を先生だけでなく，クラスの人全員に分かるように，いろいろな方法を使ってかき表し，それを基に班の人と相談しながら解いてみましょう。

図のように，長さの等しい棒を正方形に左から順に並べていきます。正方形が50個のとき，棒は全部で何本必要ですか。



写真1 数学的コミュニケーションを班で行っている様子

図1 実態調査の問題

次に示す図2は，ある班の数学的コミュニケーションにおける表現の様子をまとめたものである。

生徒1	生徒2	生徒3	生徒4	生徒5
答えは151本だよ				
	どうして？	いいんじゃない		(うなづく)
(生徒2を見ながら) だって $3 \times 50 + 1$ で151となるよね				(プリントを見ている)
	分からない			
...		(生徒2を見ながら) だって3本ずつ増えるでしょう		
		...	(生徒3を見ながら) え，正方形だから4本ずつじゃない？	
		(自分がかいた図を全員に見せて)		
		こういうふうには3本ずつ増えるでしょう		
(生徒3がかいた図を見る)	(生徒3がかいた図を見る)		あー	(生徒3がかいた図を見る)
(生徒3がかいた図を指で指しながら) 3本ずつ50個増えて，残りの1本を足すと151本になる	(自分のプリントにかき込んでいる)	(生徒1を見てうなづく)	(自分のプリントを見直す)	(自分のプリントをかき直す)

図2 ある班の数学的コミュニケーションにおける表現の様子

(2) 指導の視点

図2にある生徒1に注目してみると、「151本だよ」と自分の答えを示し、その考え方を説明するため「 $3 \times 50 + 1$ で151」と記号的表現である式で説明していた。しかし、式の説明だけで、他の表現様式を活用することができていないことから、他の生徒に自分の考え方を十分に伝えることができず、困っている様子が見られる。このように、自分の考え方はあるが、数学的表現を効果的に使えず、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えることができていない生徒が多く見られた。

しかし、この班では、この後、生徒3の「3本ずつ増える」という言語的表現への変換や での図的表現(図3)への変換によって、生徒1は最終的に のような言語的表現に変換して自分の考え方を表現することができている。このような表現様式間の表現方法の変換を本研究では表現様式の「よみ換え」と呼ぶことにする。



図3 生徒3が で示した図的表現

数学的コミュニケーションにおいて、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるためには、三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現できるようにすることが必要であると考えられる。そこで、数学的コミュニケーションにおける表現力を高める指導の視点を「自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるために、三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現することができる」とし、表現様式のよみ換えの指導を中心とした手だてについて考え、実践することとした。

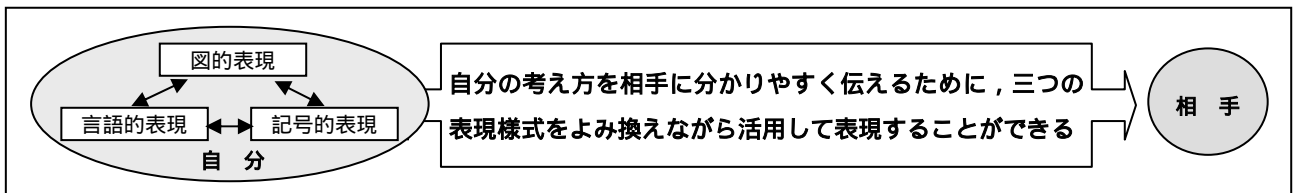


図4 数学的コミュニケーションにおける表現力を高める指導の視点

(3) 手だての具体化

手だてア：記号的表現から図的表現，言語的表現へのよみ換えの指導

実態調査の際にかかれた生徒の記述による表現から、自分の考え方を表現するために使われた表現様式について人数集計したところ、図5に示すような結果が得られた。生徒は自分の考え方を表現するに当たって、記号的表現である式を用いた表現に偏る傾向が見られる。

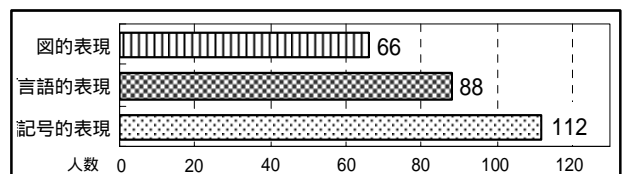


図5 使われた表現様式の人数集計

これは、小学校から中学校へと学年が進むにつれ、記号的表現へ向かう指導の内容が多くなるためである。図6に示すように、図的表現を手掛かりに数量の関係などを把握し、言語的表現を通して考えを共有しながら、最終的に客観性を求めた記号的表現へとよみ換えながら学習が進められることが多い。

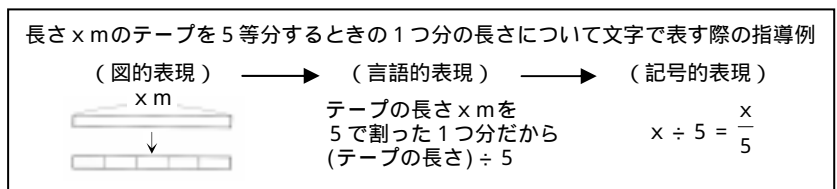


図6 記号的表現へ向かう指導例

しかし、数学的コミュニケーションにおいて、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるためには、図的表現と言語的表現を効果的に用いることも必要となる。

そこで、記号的表現から図的表現，言語的表現へのよみ換えの指導を取り入れることによって、記号的表現に偏らず、図的表現，言語的表現のそれぞれを活用して表現することができるようになる考えた。

手だてイ：三つの表現様式によみ換える指導
 実態調査の際にかかれた生徒の記述による表現から，一人一人の説明の中で使われた表現様式の数について人数集計した結果，図7に示すような結果が得られた。「いろいろな方法を使って」と指示したにもかかわらず，図的表現，言語的表現，記号的表現の三つの表現様式を使って説明していた生徒は43人と全体の3分の1程度しかおらず，式のみ（図8）言葉のみ（図9）といった一つの表現様式しか使っていない生徒も多く見られた。

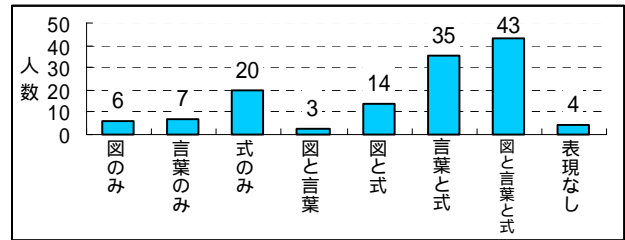


図7 一人一人が使った表現様式の数集計 $N=132$

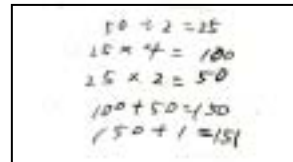


図8 式をみの表現

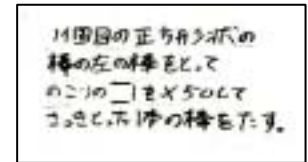


図9 言葉のみの表現

これは，自分で気付いた表現様式によみ換えを行って解答を導き出した後，その他の表現様式へによみ換えについて積極的に考えることができていることによるものだと考えられる。

しかし，数学的コミュニケーションにおいて，自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるためには，三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現することが必要となる。

そこで，図10のワークシートを利用し，生徒が三つの表現様式すべてへによみ換えについて考える指導を取り入れることとした。手だてアの記号的表現から図的表現，言語的表現へによみ換えの指導に加えて，三つの表現様式すべてへによみ換えについて考えることによって，三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現することができるようになることを考えた。

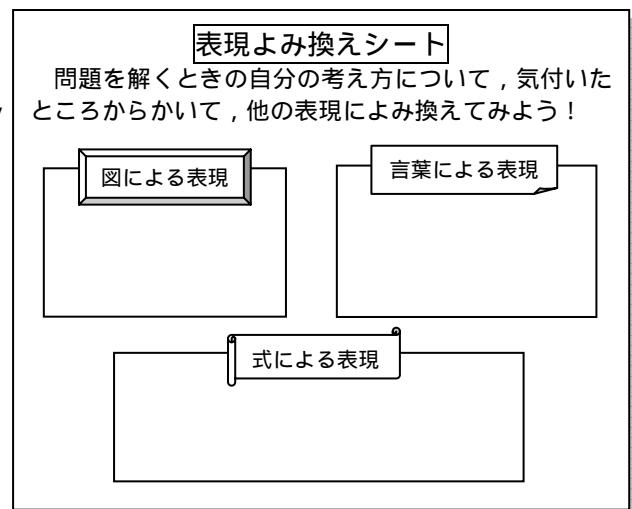


図10 表現よみ換えシート

手だてウ：自分の考え方を相手に伝えるために表現様式をよみ換える指導

実態調査の生徒1に見られたように，自分の考え方を相手に伝えるために表現様式をよみ換えることができていない生徒が多く見られる。

これは，実際に自分の考え方を相手に伝えるため表現様式をよみ換える経験が少ないことによるものだと考えられる。一斉授業の中で，すべての生徒にその機会を持たせることは難しい。

そこで，図11のワークシートを利用し，5，6人の班の中で，お互いの考え方を説明し合う場面を設定し，その際に他の生徒から表現に対する指摘を受け，その指摘に対する表現様式によみ換えについて考える指導を行うこととした。手だてア・イの三つの表現様式によみ換えの指導を踏まえて，相手の指摘に対する表現様式によみ換えについて考えることによって，自分の考え方を相手に伝えるために表現様式をよみ換えて表現することができるようになることを考えた。

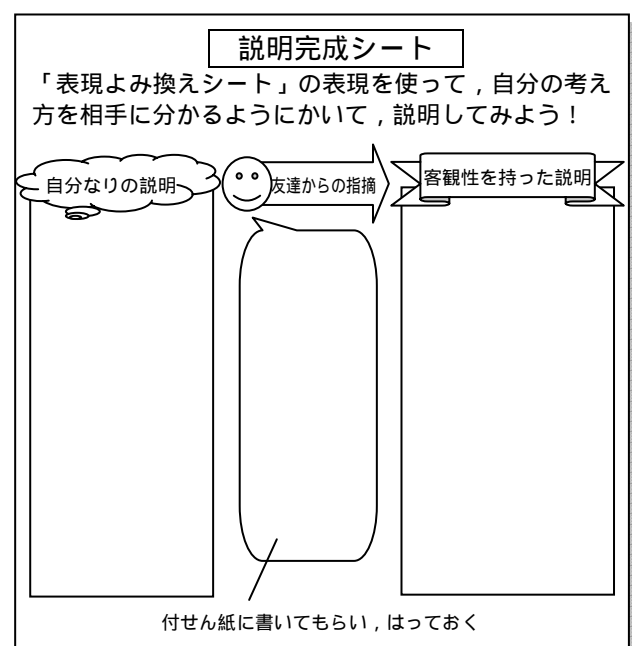


図11 説明完成シート

表現様式のよみ換えの指導を中心とした，これら三つの手だてを図12に示すように段階的に行うことが，生徒の数学的コミュニケーションにおける表現力を高めるために有効であると考えた。

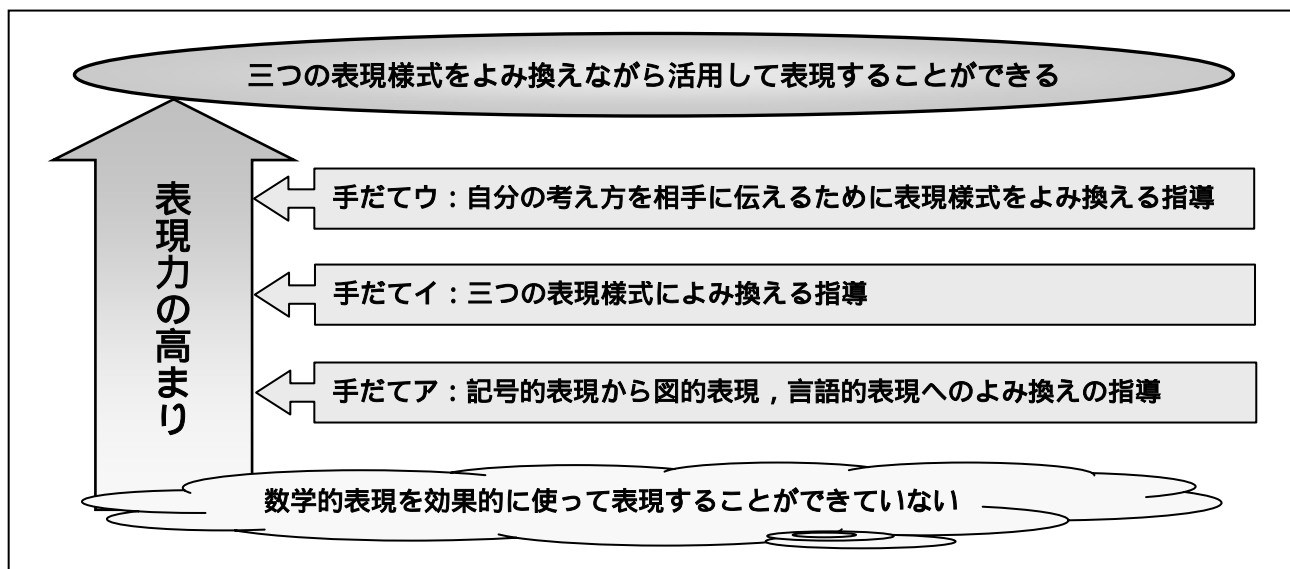


図12 数学的コミュニケーションにおける表現力を高める段階的な指導の手だて

3 授業の実践と考察

本校の第1学年4クラス 132名を対象に，第1学年「文字の式」の単元を通して，数学的コミュニケーションにおける表現力を高める指導の手だてを実践し，その結果について考察した。

(1) 手だてア：記号的表現から図的表現，言語的表現へのよみ換えの指導

図，言葉から式への順方向のよみ換えの指導と併せて，式から図，言葉への逆方向のよみ換えの指導を単元の初めの段階から指導の中に取り入れて行った。

式から図，言葉へのよみ換えについては慣れていないこともあり，戸惑っている様子うかがえた。しかし，図13に示すように，順方向のよみ換えの指導の後にその都度，逆方向のよみ換えを考慮することによって，その抵抗感も消え，式の意味を図や言葉を使って説明するなど，図的表現，言語的表現を活用して表現することができるようになった。

単元終了後，事前の実態調査と同様に，生徒の記述による表現の様子についての事後調査を実施し，自分の考え方を表現するために使われている表現様式について人数集計したところ，表2に示すように，図的表現，言語的表現を用いて自分の考え方を表現している生徒が増えている結果が得られた。このような結果から，記号的表現から図的表現，言語的表現へのよみ換えの指導を併せて指導の中に取り入れることによって，記号的表現に偏らず，図的表現，言語的表現へのよみ換えを行いながら，それぞれを活用して表現することができるようになったと考えられる。

言葉から式へのよみ換え
 「1個×円のおかしを兄は7個，妹は4個買ったとき，二人の代金の差を式で表すとどうなりますか」
 (解答例) $7x - 4x = (7 - 4)x = 3x$ (誤答例) $7x - 4x = 3$

(その指導のすぐ後に)
式から図，言葉へのよみ換え
 「このとき， $5x - 3x = 2x$ の式の意味を，図や言葉で表すとどうなりますか」(兄が妹より個数が多いとする)
 (言葉での解答例) 1個×円のおかしを兄が5個，妹が3個買ったとき，二人の代金の差が2×円になる。
 (図での解答例) 兄... $\begin{array}{c} \times \times \times \times \\ \times \times \times \end{array} \times \times$
 妹... $\begin{array}{c} \times \times \times \\ \times \times \times \end{array}$

図13 式から図，言葉へのよみ換えの問題例

表2 使われた表現様式の人集計の実践前後の比較

	図的表現	言語的表現	記号的表現
授業実践前	6 6	8 8	1 1 2
授業実践後	1 0 5	1 0 7	1 1 3

N = 132

また、図13の誤答例に示すような文字式の計算間違いの見られた生徒が、図的表現、言語的表現へのよみ換えを考えることによって、文字式の計算の意味について理解し直し、その間違いを修正している場面も見られた。記号的表現から図的表現、言語的表現へのよみ換えの指導は、式の意味の理解を深める上でも、効果があることが分かった。

(2) 手だてイ：三つの表現様式によみ換える指導

単元末のまとめ問題において、図14に示すワークシートを用いて三つの表現様式へのよみ換えについて考える指導を行った。

ワークシートを用いた指導の場面では、三つの表現様式へのよみ換えを記述するようにしたため、自力解決後も、他の表現様式へのよみ換えについて考えることができていた。図14に示した生徒Aは、まず式による表現を使って、帰納的に「 $3 \times n + 1$ 」を導き出すことができていた(図14 a)。その後、図による表現へのよみ換えを考える際に、3本ずつ増えていくことに気付き(図14 b)、それを最終的に言葉による表現によみ換えることによって自分の考え方をまとめ(図14 c)、三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現できるようになっていった。このように、生徒は自分の表現しやすい表現様式から他のそれぞれの表現様式へのよみ換えを考えることによって、三つの表現様式すべてへのよみ換えについて考えることができていた。また、手だてアにおいて逆方向のよみ換えについても指導していたため、式から図、言葉へのよみ換えを積極的に考えている様子が多く見られた。

さらに、学級全体で、表現様式へのよみ換えについて発表し合い、確認することによって、他の生徒の表現様式へのよみ換えについても考えることができ、理解を深めることができていた(写真2)。

単元終了後、事前の実態調査と同様に、生徒の記述による表現の様子についての事後調査を実施し、一人一人の説明において使われた表現様式について集計したところ、表3に示すように、三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現できている生徒が増えている結果が得られた。このような結果から、図14に示すワークシートを用いて三つの表現様式へのよみ換えについて考える指導を行うことによって、三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現できるようになったと考えられる。

表現よみ換えシート

問題を解くときの自分の考え方について、気付いたところからかき込んで、他の表現によみ換えてみよう!

下の図のように、長さの等しい棒を正方形状に左から順に並べていきます。正方形がn個のとき、棒は全部で何本必要となりますか。
nを使った文字の式で表しなさい。

□

□

□

□

...

□

1個 2個 3個 4個 ... n個

図による表現

$3n+1$ (本)

言葉による表現

→正方形がn個のときに3本ずつ必要で、正方形が4個のときは、最後の正方形には3+1本必要なので、 $3n+1$ 本の棒が必要です。

式による表現

a

$1個 \rightarrow 3 \times 1 + 1 = 4$ 本 よみかかると、
 $2個 \rightarrow 3 \times 2 + 1 = 7$ 本 $3n+1$ (本)
 $3個 \rightarrow 3 \times 3 + 1 = 10$ 本
 $4個 \rightarrow 3 \times 4 + 1 = 13$ 本
 $50個 \rightarrow 3 \times 50 + 1 = 151$ 本

図14 ワークシートによるよみ換えの様子

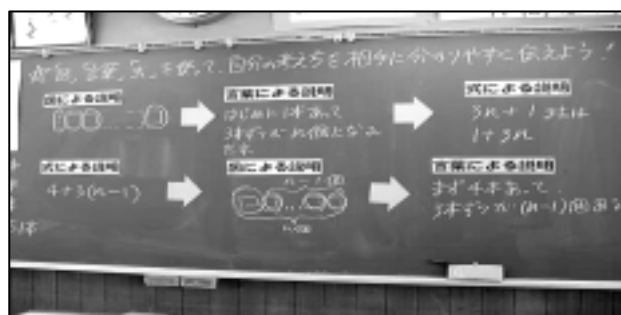


写真2 学級全体でよみ換えについて考える場面

表3 一人一人が使った表現様式の人数集計の実践前後の比較

	図のみ	言葉のみ	式のみ	図と言葉	図と式	言葉と式	図と言葉と式	表現なし
授業実践前	6	7	20	3	14	35	43	4
授業実践後	2	2	9	7	6	8	90	8

(3) 手だてウ：自分の考え方を相手に伝えるために表現様式をよみ換える指導

手だてイの授業の後に、問題についての自分の考え方を相手に分かるようにワークシートに記述し、それを基に、5、6人の班の中で、お互いの考え方を説明し合う授業を行った。そしてその際に、他の生徒から表現に対する指摘を受けるようにし、その指摘に対する表現様式のよみ換えを考える指導を行った。

自分の考え方をワークシートに記述する場面では、それを基に実際に他の生徒に説明することとしたため、自分だけが納得するのではなく、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるためにはどのように表現をすればよいかについて考えながら記述している様子が見られた。その中で、自分の記述した表現を途中で振り返り、自分の表現にかかれていない表現様式によみ換えて表現しようとしている姿も見ることができた。

また、班の中で、互いの考え方を説明し合う場面では、他の生徒から指摘を受け、その指摘に対する表現様式のよみ換えを考えることによって、手だてア・イで学習したよみ換えを行い、自分の考え方を相手に伝えるために表現様式をよみ換えて表現することができていた。図15で示した生徒Bは、自分なりの説明として、言葉を中心とした表現で説明をしたが、その式となる根拠の表現の不十分さや図を入れたほうが分かりやすいという他の生徒からの指摘に対して、図的表現によみ換えを行い、相手の指摘に応じた表現様式によみ換えて表現することができていた。

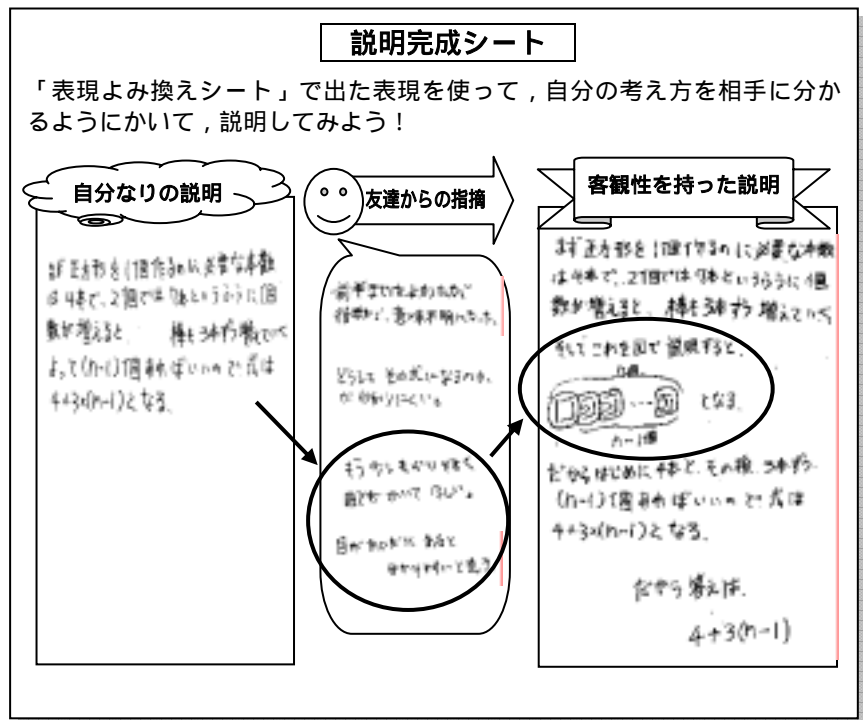


図 15 相手の指摘に応じて表現様式をよみ換えて表現している様子

今回の他の生徒からの指摘の種類と、その指摘に対する表現様式のよみ換えについて集計した結果、表4のような結果が得られた。手だてア・イでのよみ換えの指導によって、初めから三つの表現様式を活用して表現できていた生徒が多く、指摘の数自体は少なかったが、その中でも、図的表現、言語的表現への指摘が多く見られたのは、今回の実践によって、それぞれの表現様式への意識が高まった結果と考える。また、それぞれの指摘に対して、表現様式をよみ換えて表現することができている生徒が多く見られた。このような結果から、自分の考え方を相手に伝えるために表現様式をよみ換えて表現することができるようになったと考えられる。

表 4 相手の指摘に応じた表現様式のよみ換えが見られた人数集計

図的表現に関する指摘の数	指摘に対するよみ換えが見られた数	指摘に対するよみ換えが見られなかった数
3 2	2 7	5
言語的表現に関する指摘の数	指摘に対するよみ換えが見られた数	指摘に対するよみ換えが見られなかった数
2 0	1 6	4
記号的表現に関する指摘の数	指摘に対するよみ換えが見られた数	指摘に対するよみ換えが見られなかった数
9	7	2

N = 132

4 生徒の感想と考察

実践後の生徒の感想から、今回の実践についての考察を行った。

図16に示した生徒Cは、今まで自分の考え方を式で表現することを中心に考えていたが、表現様式のよみ換えの指導を行ったことによって、言葉、図によみ換えながら活用して表現しようとしている姿がうかがえる。図17に示した生徒Dは、自分の考え方を相手に伝えるために表現様式をよみ換える指導を行ったことによって、三つの表現様式をよみ換えながら活用して、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えようとしていることができている。

このように、今回の実践で生徒は、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるために数学的表現を効果的に使って表現する力について高めることができたと思う。

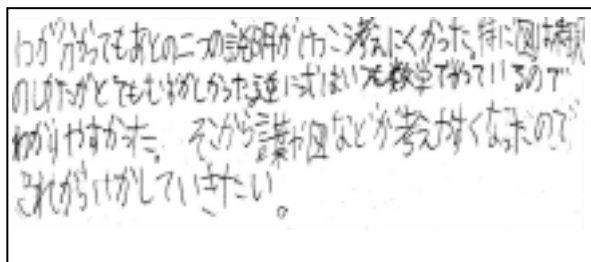


図 16 実践後の生徒Cの感想

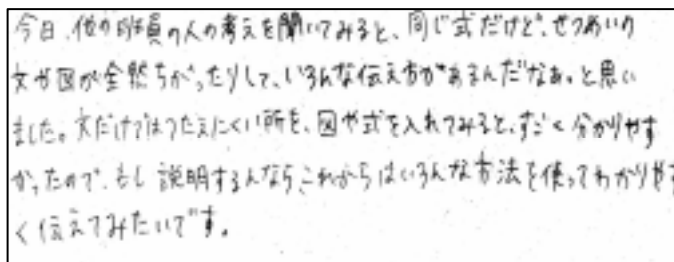


図 17 実践後の生徒Dの感想

研究のまとめと今後の課題

本研究では、数学的コミュニケーションにおける表現力を高めるため、指導の視点を「自分の考え方を相手に分かりやすく伝えるために、三つの表現様式をよみ換えながら活用して表現することができる」とし、表現様式のよみ換えの指導を中心とした手だてについて考え、実践を行った。記号的表現から図的表現、言語的表現へのよみ換えの指導、三つの表現様式によみ換えて表現する指導、相手に伝えるために表現様式をよみ換える指導を段階的に行った結果、それぞれの段階において効果が見られ、数学的コミュニケーションにおける表現力を高める指導において、有効な手だてであることが分かった。

しかし、今回の実践では、自分の表現の様子を振り返りながら指導を進めようと考えたため、記述による表現を基にした指導が中心となった。普段の授業における数学的コミュニケーションの場面では、自分の考え方を記述によって振り返りながら表現する場面ばかりではない。授業の流れの中で、状況に合わせて表現様式のよみ換えができるように、今後も表現様式のよみ換えを中心とした指導の手だてを継続して行っていく必要があると考える。

さらに、今回の実践の中で、他の生徒の表現に対して指摘を行う場面において、同じ表現に対してもその指摘の内容に差が見られた。これは、生徒の表現をよみとる力にも差があることを示している。表現力を高める指導を行っても、それに合わせた表現をよみとる力が育たなければ、自分の考え方を相手に分かりやすく伝えることは難しい。今回の表現力を高めるための指導と併せて、表現をよみとる力を高めるための指導についても考え、行っていく必要があると感じた。

また、今回の実践では、「文字の式」の単元における取り組みであったが、他の単元、領域についても同様の指導の手だてにおいて、効果を得ることができるか、今後の課題としたい。

本研究では、数学的コミュニケーションにおける表現力を高める指導の工夫について取り組んだが、この研究の成果を生かしながら、今後も授業における話し合い、練り上げといった場での思考の相互交流を更に充実させ、数学の学習内容の理解が深められるような授業を目指していきたい。

引用・参考文献

- 1) 文部省：中学校学習指導要領（平成10年12月）解説数学編，大阪書籍，p.5，1999
- ・ 中原忠男：算数・数学教育における構成的アプローチの研究，聖文社，1995