

図形領域において論理的思考力を育てる学習指導の工夫
- 「平行と合同」における分析的思考を重視した指導 -

赤磐市立高陽中学校 教諭
森 本 治

研究の概要

本研究では、中学校数学において論理的思考力を育てる学習指導の充実を目指し、第2学年図形領域を中心に証明の指導方法の工夫を探った。その結果、教師が証明問題の指導を行う際に「結論を導くために何を示したらよいのか」を考える「分析的思考」を重視した指導を行うことが、生徒の論理的思考力を育てることに効果があることが分かった。

キ - ワ - ド 中学校数学，論理的思考力，図形領域，証明問題，分析的思考

はじめに

数学の学習は、単に計算の仕方を学ぶだけではない。例えば、図形の性質を数学的な推論の方法によって考察する過程などを通して、論理的思考力を伸ばしていくことが挙げられる。

しかし、私がこれまで行ってきた授業を振り返ってみると、生徒は、証明のような論理的思考力を用いて自分の考えを組み立てて記述する問題で、「何を書いたらよいか分からない」「どう説明したらよいか分からない」というように考えを進めることができず、苦手意識を持っていることが多いように感じる。また、書くことをあきらめて、無記述の生徒も多い。生徒に正しい根拠を基に正確に判断したり、相手が納得するように説明を考えたりする力を伸ばす必要性を感じている。

国立教育政策研究所が行った平成15年度小・中学校教育課程実施状況調査では、文字を使って一般的に考え、説明を組み立てていく力、合同条件などを根拠として考え、証明を組み立てていく力など、論理的に考えて、それを表現する力を問う問題を苦手としている傾向があると示されている。また、平成16年度に実施された特定の課題に関する調査においても、数学的に考える力についての項目で、論理的に説明する力や記述する力に課題があり、指導の改善の具体策として根拠を明らかにしながら論理的に説明する指導の充実が必要であると指摘されている。これらのことから、今後、より一層論理的思考力を育てる指導が期待されている。

研究の目的

第2学年「平行と合同」の証明学習における実践授業を通して、論理的思考力を育てる学習指導の工夫について探る。

研究の内容

1 数学における論理的思考力について

論理的思考力は、一般的には「ものごとを筋道立てて考える力」とであると言われている。数学でいう論理的思考力について、小西（1989）は、「論理的な^{えき}考えとして、類推的な考え、帰納的な考え、演繹的な考えがあるといわれていることはすでに周知の通りである」¹⁾と述べているように、数学における論理的思考力は、表1に示す三つの数学的な考え方を主に用いて筋道立てて考える力であると言える。

私たちは、類推的な考え方や帰納的な考え方を用いて身の回りの多くの決まりや法則を見い

表1 論理的に考える際に用いられる三つの数学的な考え方

類推的な考え方	既知の学習内容から、類似点に着目し新しいことを見いだす考え方
帰納的な考え方	幾つかの集められた事例から、一般的な事柄を見いだす考え方
演繹的な考え方	いつでも成り立つことを、正しいことを根拠に説明する考え方

だすことができる。しかし、その決まりや法則が本当に正しいかどうかは、この二つの考え方で見いだされた時点では分からない。そこで、演繹的な考え方をを用いて、いつでも正しいことを論理的に説明しなければならない。この演繹的な考え方によって、筋道立てて考え説明するような場面は、学年が進むにつれて次第に多くなっていく。また、小学校の算数の学習と比較して、中学校で学ぶ数学の学習の特徴は、演繹的な考え方を使う場面が多いことである。したがって、中学校では、この演繹的な考え方をを用いて考えることで論理的思考力を伸ばしていく必要があると考える。

2 単元設定について

中学校学習指導要領解説数学編に、中学校数学科の図形指導の意義について「図形に対する直観的な見方や考え方や図形の性質を数学的な推論の方法によって考察する過程を通して養われる論理的な見方や考え方は、数学に限らずいろいろな分野の学習において重要な役割を果たすもので、こうした論理的に考える力を一層伸ばす必要がある」と示されている²⁾。論理的思考力の育成は、すべての領域・単元において目指していくものであるが、特に、図形領域において育成が期待されている。そして、演繹的な考え方は、図形領域の中でも図形の性質が体系化されていく中学校第2学年の図形の論証の学習で必ず必要となる考え方である。

そこで、演繹的な考え方をを用いて考える場面である「平行と合同」の単元における証明指導で、分析的思考を重視した指導を取り入れることを考えた。

3 分析的思考について

この分析的思考について、片桐（2004）は対義の思考である総合的思考も含めて、表2のように述べている。そこで、この二つの思考を証明の中で具体的に説明すると、図1のようになる。まず、総合的思考は、図1の に示す二つの仮定を出発点として、証明の記述と同じ方向で結論を導いていくという考え方である。次に、分析的思考は、図1の が示すように、結論から出発し「結論である $AC \parallel DB$ が言えるには、どんなことが示されたらよいだろうか」と考え、「錯角が等しいことを示すことができれば平行であることが言えるので、 $\angle OAC = \angle OBD$ が示されればよい」と導く考え方である。さらに、分析的思考によって、「 $\angle OAC = \angle OBD$ が言えるには、何を示せばよいか」とたどっていき、仮定まで行き着くことができる。また、図1から分かるように、分析的思考は総合的思考と逆方向の考え方なので、分析的思考を「逆向きの考え方」と言うこともある。この分析的思考は、演繹的な考え方に含めて考えてもよいとされ、この分析的思考を重視した指導が有効ではないかと考えた。

4 分析的思考に関する調査

(1) 教科書における分析的思考を促す記述

実際に、教科書には分析的思考を促す発問や内容の記述がどのくらいあるのか、中学校で使用されているすべての教科書について記述の数を調査した。調べた単元は、本校が使用する教科書の「平行と合同」と同じ単元である。具体的には、図1の証明問題における「結論 $AC \parallel DB$ が

表2 総合的思考と分析的思考

総合的思考	「分かっていることを基に、それからどんなことが言えるか」と仮定から結論を考えていく思考
分析的思考	「そのことが言えるには、何が言えればよいか」というように結論から仮定を考えていく思考

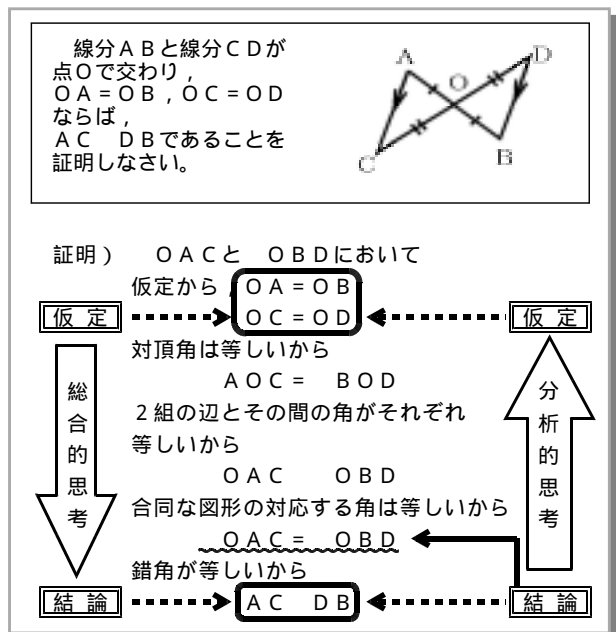


図1 総合的思考と分析的思考の具体例

言えるには、どんなことが示されたらよいだろうか」というような記述を数えた。

図2に示したように、分析的思考を促す発問や記述の数は教科書によって記述数に違いはあるが、分析的思考を促す記述は多いとは言えないことが分かった。また、教科書によっては、「平行と合同」単元以降で、分析的思考を促す発問や記述が、ほとんど見られなくなるものもある。教師が、この単元で、分析的思考を用いて考える指導を行っていないと、更に生徒が分析的思考を用いて考える機会が少なくなることが予想される。そこで、教師の意図的な分析的思考の指導が必要であると考えた。

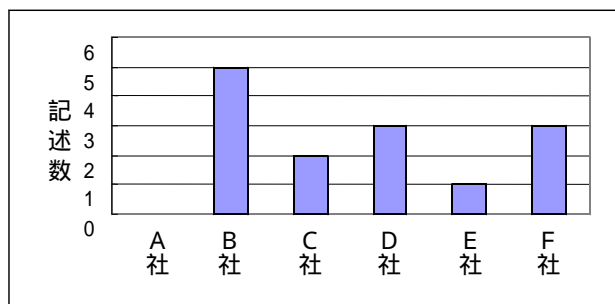


図2 各教科書における分析的思考を促す記述数の比較

(2) 分析的思考の実態調査

実施計画

ア 対象 赤磐市立高陽中学校第2学年49人

イ 実施時期 平成18年10月下旬

ウ 調査の目的

分析的思考をしようとする生徒と、筋道立てて考えることができる生徒の実態を把握する。

考察

図3に示す調査問題を行った後に、この問題において分析的思考をしようとしたかどうかを問うアンケートを実施した。表3は、分析的思考をしようとした生徒と筋道立てて考えることのできた生徒の人数を示している。分析的思考をしようとした生徒は、49人中27人で半数を少し超えた人数であった。また、筋道立てて考えることのできた生徒は、15人であった。これらの結果から、分析的思考をしようとする生徒と、図3のような文字による説明の問題において、筋道立てて考えることができている生徒は、決して多くないということが言える。

調査問題

(前略)

「 」の中に並んだ3つの数の和は、いつでも真ん中の数の3倍になる」ことが成り立つことを文字を使って説明しようとしてきました。下の説明に続けて完成させなさい。

カレンダー

日	月	火	水	木	金	土
					1	2
					3	4
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

図3 事前調査問題

表3 分析的思考をしようとした生徒と筋道立てて考えることのできた生徒の実態

	筋道立てて考えることができた	筋道立てて考えることができなかった	合計
分析的思考をしようとした	13	14	27
分析的思考をしようとしなかった	2	20	22
合計	15	34	

(単位：人) N = 49

分析的思考をしようとしなかった生徒22人に注目すると、そのうち、筋道立てて考えることができた生徒は、わずか2人であった。分析的思考をしようとした生徒と比較しても、筋道立てて考えることができる生徒の人数には大きな差がある。また、分析的思考をしようとし、かつ筋道立てて考えることのできた生徒は27人中13人で、分析的思考をしようとした人数の半数を下回っている。この結果から、分析的思考をしようとしたからといって筋道立てて考えることができているとは言えない。

これらのことから、分析的思考をして証明問題を解こうとする態度を養うこと、また、分析的思考から筋道立てて考えをまとめるための工夫が必要であり、その手だてを考えた。

5 分析的思考を重視した指導の手だて

実態調査から次のような手だてを考えて実践授業を行った。

(1) 分析的思考を取り入れたワークシートの工夫

「証明が嫌い」「証明が苦手」という生徒にとって、証明を考え記述するということは大変困難なことである。そこで、正確な記述・表現については図形の学習を通して次第に形式に慣れさ

せ、最終的に表現することができるよう段階を踏んだ指導を計画する必要がある。中学校第2学年の段階では、生徒の説明に耳を傾け論理の進め方や証明を構成していく流れの指導に力点を置く。

そこでまず、教師が証明の進め方として、図4に示す4段階を踏んで考えを進めていくよう指導を行う。この流れに従って、図5のようなワークシートを使用し、証明の流れを作成するところから始めることにした。

証明指導の最初の授業では、図5に示すようにワークシートの左側に、証明の構成を目指した証明の流れを作成する。証明の流れが完成した後に、ワークシートの右側に示すような等しい図形の性質や図形の合同を表す式に根拠となる事柄を記入するようにした。そして、次の授業では、図6のワークシートを使用し、ワークシートと同様に証明の流れを作成し、根拠となる事柄は矢印に示したところに書き入れ、少しずつ証明の記述の形に近付けるようにした。実践最後の時間では、図7のワークシートを使用し、ワークシート、の両方で太線で囲んでいる部分だけを解答欄に記入した。少しずつ等しい辺や角を表す式や根拠を書き込む欄を減らしていったが、実践授業すべてのワークシートには必ず結論から「逆向きの考え」を行うよう記した記述を加え、どの生徒も分析的思考を用いて考えることができるように工夫した。

(2) 分析的思考を促す発問

前述の分析的思考を促す記述数の調査結果より、教科書において分析的思考を促す記述は限られた問題だけである。また、通常証明問題を考えるとき、仮定から結論を導くという意識が強くなるので、教師が意図的にこの分析的思考を促す発問を行う必要がある。

そこで、今回の実践授業で扱ったすべての証明問題において、「結論を導くためには、どんなことが分かればよいだろうか」という分析的思考を促す発問を全体の指導の中で行う。そして、この発問に対してクラス全体で考える時間を十分に確保する。また、机間指導を行う際に、先に述べた発問ではどのようなことを考えればよいか理解できない生徒には、「結論が言えるにはどの三角形の合同が言えればよいか」のように助言を与えて考えさせることにした。

6 実践授業

以上の二つの手だてを基に、第2学年「平行と合同」の単元において実践授業を行った。表4は学習指導計画の一部、図8は分析的思考を重視した実践授業例を示したものである。

「仮定」と「結論」を区別する。
 「仮定」と「結論」を図に書き込む。
 結論から「逆向きの考え」をする。
 根拠となる事柄を考える。
 生徒には分析的思考を「逆向きの考え」として伝えた。

図4 証明の進め方

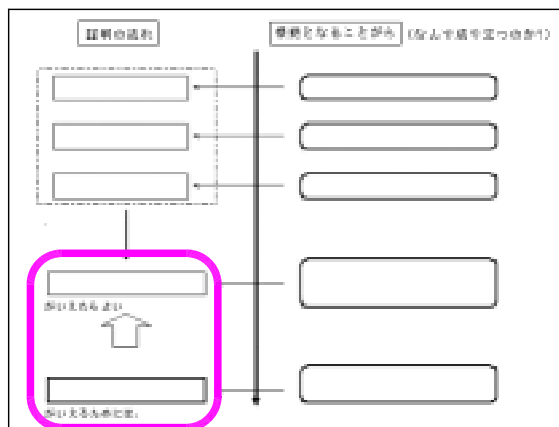


図5 ワークシート

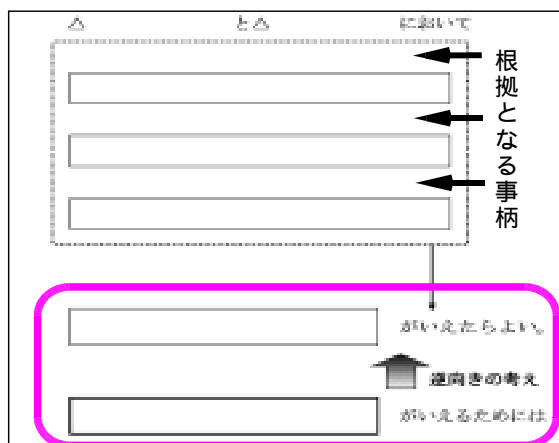


図6 ワークシート

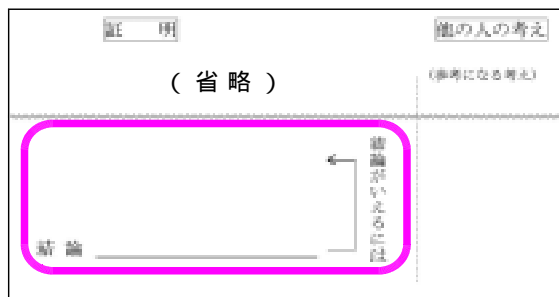
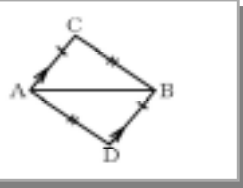



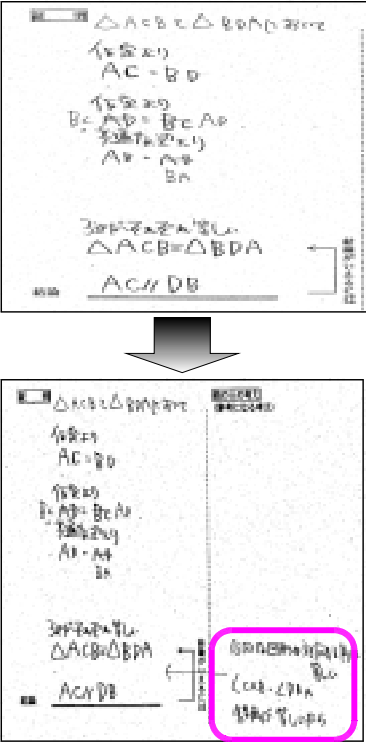


図7 ワークシート

表4 学習指導計画の一部

次	時	学習内容	本時の目標	分析的思考に関する指導
二	4	証明の進め方 (仮定と結論)	・仮定と結論の意味を理解し、区別することができる。	仮定と結論の意味を理解させる。
	5	証明の進め方 (根拠となる事柄)	・証明の進め方を理解することができる。 ・仮定や既に正しいと認められている事項を根拠にして、結論を導くことができる。	分析的思考を逆向きの考えとして生徒に説明し、理解させる。 (図5, ワークシート)
	6	いろいろな証明	・作図の方法が正しい理由や簡単な図形の性質の証明を、根拠となる事柄を明らかにして表現することができる。	分析的思考を用いて、証明の流れを考え証明に取り組みさせる。 (図6, ワークシート)
	7	証明練習	・平行線や角の性質、三角形の合同条件を適切に使い、図形の性質が成り立つ理由を、筋道立てて考えることができる。	証明の記述の場合にも、分析的思考を用いて問題に取り組みさせる。 (図7, ワークシート)

実施時期：平成18年11月中旬～下旬，対象：赤磐市立高陽中学校第2学年

目標	平行線や角の性質，三角形の合同条件を適切に使い，図形の性質が成り立つ理由を，筋道立てて考えることができる。
学習活動	T：教師の発問，S：生徒の反応，教師の支援
1 問題を把握する。	<p>問題1</p> <p>右の図で $AC = BD$，$AD = BC$ ならば $AC \parallel DB$ である。 このことを証明しなさい。</p> 
2 自力解決をする。	<p>T：「今日は平行であるための証明です。今まで学習した証明の進め方に従って、まずは自分の力で考えてみよう。」</p> <p>この場面での机間指導では、仮定と結論の区別や図に書き込みができていないかどうか、表記の間違いなどについて、助言を行うのみとする。結論から正しく分析的思考ができていないかなど、証明の進行状況を確認する。</p>  
3 小グループで考えを話し合う。	<p>T：「証明がある程度できている人もいますが、本当にきちんと筋道立てた証明ができているかどうか確認してみよう。」</p> <p>T：「なぜ三角形の合同が言えたら、$AC \parallel DB$ が言えるのですか。」</p> <p>S：「合同な図形の対応する辺は等しいからかなあ。うーん。・・・」</p> <p>T：「もう一度結論から逆向きの考えをして、平行であることを証明するためには何を示したらよいか考えてみよう。それから、今まで学習した図形の性質を見直してごらん。」</p> <p>S：「確か平行であることを示すには、同位角や錯角が等しいことが言えたらいいよなあ。あっ、そうか。この図で錯角は $\angle BAC$ と $\angle DBA$ だから、この二つの角が等しいことが言えれば、$AC \parallel DB$ が言えそうだ。」</p>  
4 全体で考えを発表する。	略

ゴシック体は、「分析的思考を促す発問」

図8 分析的思考を重視した実践授業例（第二次第7時）

分析と考察

分析的思考を重視した指導として、分析的思考を取り入れたワークシートや分析的思考を促す発問が論理的思考力を育てる上でどのような効果があったのか、生徒の様子や調査問題の結果、アンケート調査の結果から考察する。

1 分析的思考を取り入れたワークシートについての考察

(1) 抽出生徒からの考察

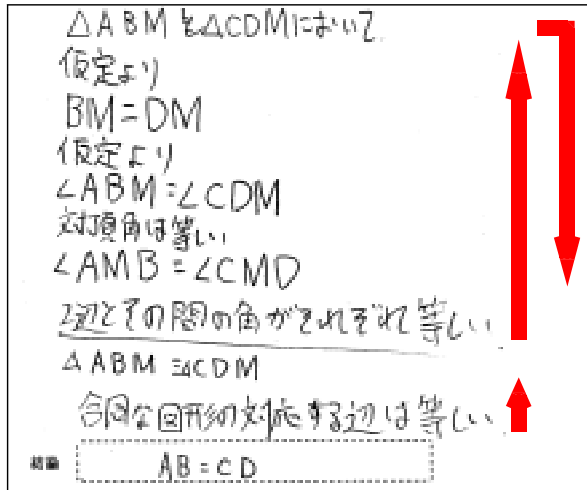


図9 生徒Aの事後調査問題における解答

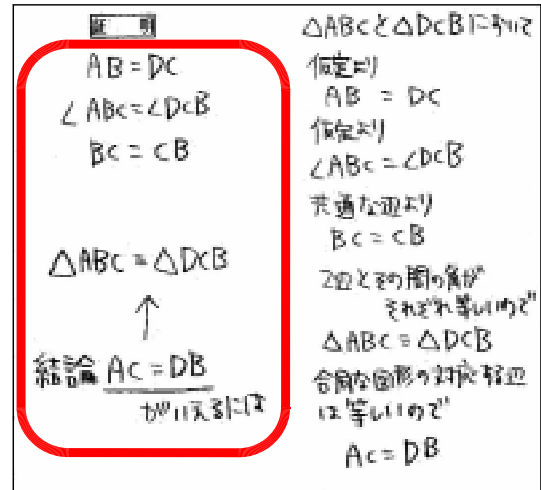


図10 生徒Bの第二次第7時におけるワークシート

生徒Aは、意欲的に授業に取り組んでいる生徒の一人である。しかし、生徒Aは、事前調査問題では何も記述することができていなかった。また、今回の実践授業の前半では、周りの証明のできている生徒に解き方を聞いたり解答を見せてもらったりして、なかなか自力で証明を進めることができていなかった。しかし、生徒Aは、事後調査で図9のような解答を記述することができた。図9の矢印は、生徒Aの思考の過程であり、丸数字はその思考の順番を表している。生徒Aは、最後まで、この問題における適切な三角形の合同条件を選択することができなかったが、ほぼ筋道立てた考えができていた。事後のアンケートにおいても「逆向きの考えが役に立った」とあり、分析的思考を取り入れたワークシートを使用することで、生徒Aは次に何を示したらよいかと考えることができ、根拠となる事柄を加えながら自分の考えをまとめることができたと考えられる。

生徒Bは、図10の太線で囲んでいるように解答欄に簡単に証明の流れを書き、その後根拠となる事柄を加えた証明に書き換えていた。太線で囲んでいる部分は、実践授業で使用したワークシートの証明の流れと同じものであり、結論から矢印を引いていることから分析的思考を行っていることが分かる。生徒Bは、分析的思考を取り入れたワークシートを使用することで、考えの進め方の見通しを立てることができ、筋道立てて考えることができたと考えられる。

(2) 事後アンケートからの考察

図11は、実践授業後の分析的思考に対する意識である。逆向きの考えは、「大変役に立った」「役に立った」と答えた生徒は49人中31名であり、63%の生徒が肯定的にとらえていた。授業後の生徒の感想にも、「考えやすいし、逆からの方が解きやすい」「逆から考えると分かりやすく、解きやすかった」「逆向きの考えをするとよく分かった」という記述があった。この分析的思考を取り入れたワークシートを使用して結論から証明を進めることで、見通し

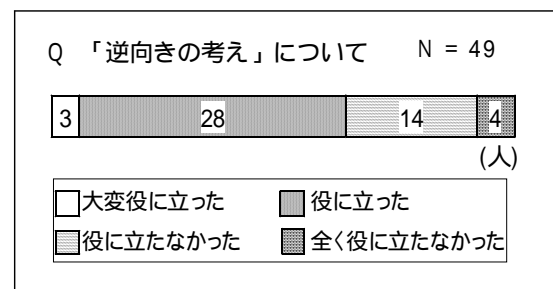


図11 分析的思考に対する意識

が立てやすくなり、自分の考えが組み立てやすかったのではないかと考えられる。

2 分析的思考を促す発問についての考察

図8の実践授業例において、次のような場面が見られた。机間指導の際、生徒Cは、「結論であるAD=BCを示すためには、何が言えたらよいか」と考えたとき、その記述から、最初は今までの問題と同様に「 $ABC=BAD$ が言えたら結論が示されるのではないか」と思っていたようだ。生徒Cは、この時点で錯角が等しいことを述べなければならないということに気付いていなかった。そこで、教師が「本当に $ABC=BAD$ が言えたら、すぐに結論であるAD=BCであることが示されたことになるのかな。平行であることを示すためには、どんなことが言えたらよかったか、もう一度今まで学習した図形の性質を思い出してみよう」と既習事項を思い出すことができるように、再度分析的思考を促す助言を行った。そして、生徒Cは、その助言を基にして、小グループでの話し合いから、錯角が等しいことが言えればよいことに気付き、修正を加えて証明を完成することができた。

この授業後の感想で、生徒Cは「一つ一つのことに納得できたので、図形の勉強が楽しくなった」と記述していた。また、生徒Cと同様の誤りをしていた生徒も、「結論を言うためにはという、逆向きの考えが大切だということを学んだ」と記述していた。今まで学習した証明問題と同様に形式的に証明を完成させていた生徒は、この分析的思考を促す助言により、この思考の必要性を感じることができたと考えられる。

3 事後調査からの考察

調査問題

右の図において、
 $BM = DM$ 、 $\angle ABM = \angle CDM$ ならば $AB = CD$ である。
 このことを証明しなさい。

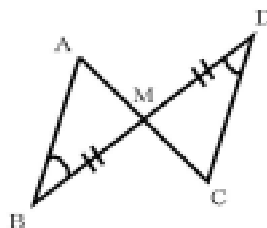


図12 事後調査問題

表5 事後調査問題の結果(全体)

	筋道立てて考えることができた	筋道立てて考えることができなかった	合計
分析的思考をしようとした	33 [13]	4 [14]	37 [27]
分析的思考をしようとしなかった	3 [2]	9 [20]	12 [22]
合計	36 [15]	13 [34]	

[]内は事前調査の結果 (単位:人) N=49

表6 事前調査で分析的思考をしようとしなかった生徒の事後調査における結果

	筋道立てて考えることができた	筋道立てて考えることができなかった	合計
分析的思考をしようとした	12	2	14
分析的思考をしようとしなかった	0	8	8
合計	12	10	

(単位:人) N=22

実践授業後に図12に示す事後調査問題を行った。続いて、事後アンケートで「結論 $AB = CD$ を証明するためには、 $\angle ABM = \angle CDM$ を示せばよいと考えたかどうか」という分析的思考をしようとしたかどうかを問う質問を行い、その結果を表5にまとめた。分析的思考をしようとし、かつ筋道立てて考えることができた生徒は49人中33人であり、生徒全体の3分の2以上であった。この結果は、事前調査より20人増えている。

さらに、事前調査で「分析的思考をしようとしなかった生徒」22人について、事後調査を追って、その結果を表5に示した。半数以上である14人の生徒が、事後調査では分析的思考をしようとしていた。さらにそのうち、筋道立てて考えることができていた生徒は12人であり、分析的思

考をしようとし、かつ筋道立てた考えができるようになった生徒が9人増えた。逆に、事後調査においても分析的思考をしようとしなかった生徒は、全員筋道立てて考えることができていなかった。これらのことから、分析的思考を重視した指導を行うことで、論理的思考力を育てることができたことの一助となる事が分かる。

研究のまとめと課題

本研究では、分析的思考を重視した指導を行うことで、証明問題で正しい根拠を基に筋道立てて考えることができるようになることが分かった。このことから、分析的思考を重視した指導を行うことは、生徒の論理的思考力を育てることに有効であることが分かった。さらに、分析的思考をしようとする生徒が増えて、問題解決に見通しが持てるようになり、意欲的に証明問題に取り組めるようになった。

図13に示した「証明(説明)する問題を解くことについてどう思いますか」という質問に対して、実践授業前は、嫌い・とても嫌いという生徒が49人中42人と大半を占めていた。ところが、実践授業後は、とても

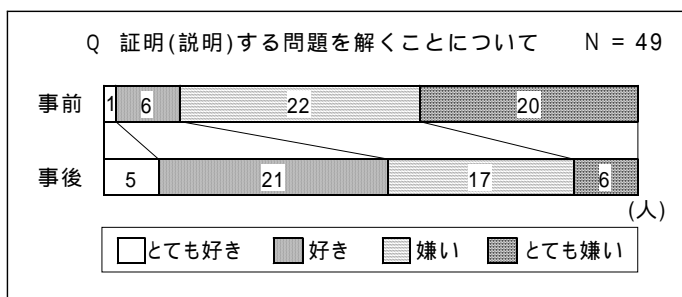


図13 証明(説明)する問題を解くことの意識の変容

好き・好きという生徒が26人、嫌い・とても嫌いという生徒が23人となり、好きという生徒が半数を超えていた。この結果から、教師が分析的思考を重視した指導を行ったことで、証明や説明する問題に対する意識が肯定的な意識に変わり、意欲的に証明学習に取り組む気持ちになっていったのではないかと考えられる。

今後は、生徒の論理的思考力を育てるのために、他の領域や単元においても、分析的思考を重視した指導を行うことが有効であることについての研究が必要である。また、分析的思考と総合的思考のどちらかの思考に偏った指導になるのではなく、どちらとも両方をバランスよく指導することが大切である。

おわりに

本研究では、論理的思考力を育てるために分析的思考の指導を重視した実践を行った。この研究を通して、今まで見えていなかった生徒の思考の様子が少しずつだが見えるようになったと感じる。つまり、教師の視点が変わったのではないかと考えられる。今回は生徒の思考の過程を注意深く観察し「この生徒はどこまで理解し、どこから理解していない」ということに注目することができた。このことは、今後の指導において生徒の思考の様子に合わせて適切な手だてや支援を行うことができるのではないかと考えられる。そして、この研究を通して、現在数学教育に求められているものや、今まで感じていた自分自身の課題を明確にすることができた。今後も引き続き論理的思考力を育てる指導方法についての研究を通して、生徒が数学を学ぶ楽しさや充実感を味わうことができるような授業をしていきたい。

引用文献

- 1) 清水静海監修，小西繁編：学習指導要領小学校算数科のキーワード 1
「論理的思考力や直観力を育てる」，明治図書，p.11，1989
- 2) 文部省：中学校学習指導要領（平成10年12月）解説数学編，大阪書籍，pp.38-39，1999

参考文献

- ・ 片桐重男：数学的な考え方の具体化，明治図書，1988
- ・ 片桐重男：新版 数学的な考え方とその指導 第1巻，明治図書，2004