

言葉や式で表現する力を育てる高等学校数学の指導法の研究 － I C Tを活用して図形問題を扱う授業を通して－

岡山県立井原高等学校 教諭
假 谷 明 宏

研究の概要

本研究では、高等学校数学の図形問題において、実験・観察アプローチを参考に生徒が I C Tを活用する学習方法を探った。集めた情報を分析・整理するという情報活用の実践力の視点を取り入れることで、言葉や式で表現する力に与える効果が見られた。

キーワード 情報教育, I C T活用, 数学, 実験・観察アプローチ

I 主題設定の理由

平成20年12月23日に文部科学省から高等学校の学習指導要領改訂案が公表された。この中で、数学の指導に当たって配慮する事項には「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること」と示されている¹⁾。また、平成15年度より学年進行で実施された学習指導要領においては、系統的・体系的な情報教育が実施され、すべての教科・科目の学習においてコンピュータやインターネットなどの情報手段を積極的に活用した効果的な教育の実施が求められている。

本校では毎年、新入生を対象に学習習慣と学力を調査・分析している。それによると、数学への取り組みに改善すべき点が見られ、図形問題が苦手である生徒の割合が多かった。また実力テストの結果からも、図形問題ではどのように考えてよいか分からず無記述のままの生徒が多いことがうかがえる。

以上のことから、図形のイメージを視覚的に示すことのできるコンピュータを活用し、図形問題を扱う授業改善に取り組むたいと考えた。コンピュータを活用した数学教育の先行研究に、佐伯ら(1997)による実験・観察アプローチを取り入れた数学の授業改善がある。その中で、コンピュータを活用した学習の利点については、「探求的思考や発見的考察を通して、生徒の知的活動を豊かなものにするのに役立つばかりでなく、とかく形式的になりがちな数学的概念を操作的・実験的な方法で具体化して提示することができる」と述べられている¹⁾。ただ、この研究では、生徒が I C Tを適切に活用し、必要な情報を集め分析し、言葉や式で表現させるという授業場面は見られなかった。本研究では、この部分に焦点を当てることで、図形問題でどのように考えたらよいか分からなくなる生徒も減り、生徒の言葉や式で表現する力も向上するのではないかと考え授業実践を行うことにした。なお、本研究では、実験・観察アプローチという言葉で、「実験等によって収集した実現象データを観察し、数学的に分析することにより、数学と実現象との関連づけを行う」「従来代数のみで解いていた数学問題をグラフ的、数値的に多様な表現で問題解決したり、数学の知識間(例えば代数と幾何)の関連づけを行う」という意味で使用する²⁾。

II 研究の目的

高等学校数学の図形問題において、実験・観察アプローチを参考に I C Tを活用し、集めた情報を分析・整理する学習活動を行うことにより、生徒の言葉や式で表現する力が向上するかどうかを、事前・事後の数学に関する意識調査と単元テストを分析・考察することから検証する。

III 研究の方法

次の手順で研究を行った。

1 実態調査

本校普通科2年A組40名の生徒を対象に、数学に関する意識と現状を調査する。

2 ICTを活用した学習活動の検討

先行研究や実態調査に基づき、図形問題に絞って、ICTを活用し、集めた情報を分析・整理して、言葉や式で表現するという情報活用の実践力の視点を取り入れた学習活動を検討する。

3 授業実践

検討した学習活動の内容で、本校普通科2年A組で授業実践を行う。

4 ICTを活用した学習活動の結果の分析・考察

検討した学習活動をすることで言葉や式で表現する力が向上したかどうかを、事前・事後の数学に関する意識調査と単元テストから分析・考察する。

IV 研究の内容

1 実態調査

本校普通科2年A組40名を対象にして数学に関する意識調査(表1)を授業実践Iの前に行い、情意レベルの高い選択肢から4・3・2・1点で得点化した。その結果、「課題解決をするためにコンピュータを利用する授業に興味がある」「授業では疑問を解決しようという探究心を刺激される」という質問に対する意識が低かった。これは、本校の数学の授業で、生徒自身がICTを活用した授業の経験がなかったことと、授業の中で疑問を持ち、自分の考えを深めていく場面が少ないことが原因ではないかと考えられる。

表1 数学に関する意識調査の内容

番号	内容
1	課題解決をするためにコンピュータを利用する授業に興味がある。
2	授業では疑問を解決しようという探究心を刺激される。
3	授業ではいつもと違う目新しいことがある。
4	授業内容は自分のよく知っていること(既習事項)と関係がある。
5	授業には積極的に取り組んでいる。
6	授業には数学的活動が楽しめるような工夫がある。
7	自分の到達すべき学習の目標がはっきりしている。
8	授業中にできた・分かったという実感がある。
9	授業で学習したことを基にして、自分で勉強してみようと思う。
10	努力すればただの学習成果(できるようになる)がある。
11	自分の努力が先生に評価されていると感じる。
12	演習問題などは授業内容と一致している。

2 ICTを活用した学習活動の検討

(1) 授業実践Iでは、線分や円を原点の周りに1回転させたときの通過領域についての問題を用意し、生徒にICTを活用させ、通過領域の境界線は線分や円上のどの点が描いたものかを、集めた情報から分析・整理させる。次に、通過領域の面積の求め方について、共通な表現でまとめさせる学習指導を行う。

(2) 授業実践IIでは、種々の図形問題を用意し、生徒に問題を解決するためICTを活用させて読み取れるものを書き出させる。さらに必要な情報を収集・分析・整理させ説明文を作成する学習指導を行う。

3 通過領域の面積を言葉や式で表現させる授業実践I

(1) 授業実践Iの概要

本校普通科2年A組40名を対象に、単元「平面上のベクトル」の演習としてグラフ作成用ソフトウェアを使って授業実践を行った。直線ABのベクトル方程式を利用し、媒介変数tの値を変化させたときの点Pの位置を求めさせる。次に、線分ABを原点の周りに1回転させたときの通過領域の境界線は線分上のどの点が描いたものかという問題を2人グループで考えさせる。さらに円を原点の周りに1回転させたときの通過領域の境界線は円上のどの点が描いたものかを考えさせる(図1)。最後に通過領域の面積の求め方を言葉や式で表現させる学習活動を行う。

問題	線分ABの通過領域を求める問題	線分ABの通過領域を求める問題	円の通過領域を求める問題
コンピュータの操作 (情報の収集)			
考え方 (判断・処理)	通過領域の面積を求めたい	円の面積は半径が分かれば求められる	ここで半径はどうか表現したらいいか
通過領域の面積の求め方(表現)	線分や円上の点で、原点からの最長距離、最短距離を求めれば (通過領域の面積) = π (最長距離) ² - π (最短距離) ²		

図1 授業実践Iにおける情報活用の実践力の視点を取り入れた学習

(2) 授業の様子

生徒にICTを活用させ、線分を原点の周りに1回転させたときの通過領域を描かせた。図1のように線分と線分上の点の動きが残像として画面に残るように設定をしていたことで、通過領域の境界線は線分上のどの点かを描いたものかを視覚的に分析・整理できていた。通過領域の面積の求め方については図2のように2人グループで学び合う姿が見られた。また、言葉や式で表現する問題について、事前の単元テストでは「通過領域の面積が、原点中心の大きな円の面積から小さな円の面積を引いたもの」という表現があった。この表現をさらに適切な表現にするために「通過領域の境界線上の点と原点の距離を図1のどの問題にも対応する共通な表現方法を考えるとどのような言葉があるか」と教師が発問することで、適切な表現方法に気付く生徒も見られた。

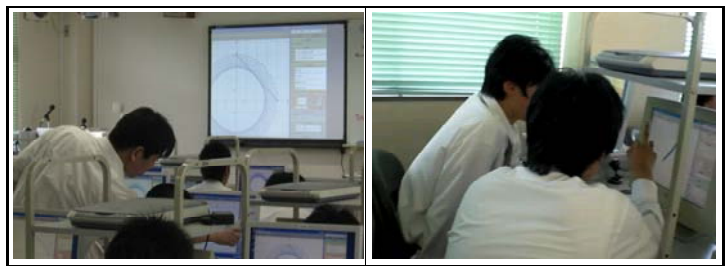


図2 個別指導と協調学習の様子

また、言葉や式で表現する問題について、事前の単元テストでは「通過領域の面積が、原点中心の大きな円の面積から小さな円の面積を引いたもの」という表現があった。この表現をさらに適切な表現にするために「通過領域の境界線上の点と原点の距離を図1のどの問題にも対応する共通な表現方法を考えるとどのような言葉があるか」と教師が発問することで、適切な表現方法に気付く生徒も見られた。

(3) 授業実践Iの結果及び分析・考察

ア 意識調査の結果

数学に関する意識調査を授業実践Iの前後で行い、情意レベルの高い選択肢から4・3・2・1点で得点化した。事前・事後の単元テストの両方を受験した35名を抽出し、対応のある平均値の差の検定(以下「t検定」という。)を行ったところ、表1に示した12の調査項目のうち3項目で有意差が見られた(表2)。

表2 事前・事後の意識調査の結果
(有意差が認められた項目)

調査項目	配点	事前		事後		有意差検定	
		平均	標準偏差	平均	標準偏差	t値	結果
番号1	4	2.10	0.96	2.97	0.82	5.37	***
番号3	4	2.49	0.75	3.08	0.75	3.17	**
番号12	4	2.92	0.69	3.49	0.64	4.60	***

N=35 ** p < .01 *** p < .001

また、事前の単元テストの結果、平均点以上の17名の生徒については「課題解決をするためコンピュータを利用する授業に興味がある」「授業ではいつもと違う目新しいことがある」の項目で有意差が見られ、平均点以下の18名の生徒については「課題解決をするためコンピュータを利用する授業に興味がある」「授業では疑問を解決しようという探究心を刺激される」「演習問題などは授業内容と一致している」の項目で有意差が見られた。

イ 事前・事後の単元テストの結果

事前・事後の単元テストの配点を表3のように定めた。事前・事後の単元テストの結果について

て、t検定を行ったところ6題のうち5題で有意差が見られた(表3)。

表3 事前・事後の単元テストの結果

問題分類	配点	事前		事後		有意差検定	
		平均	標準偏差	平均	標準偏差	t値	結果
直線のベクトル方程式の基礎的な問題	2	1.38	0.73	1.85	0.49	2.77	**
線分の通過領域の図形を調べる問題	1	0.94	0.24	0.97	0.17	1.00	
線分の通過領域の面積を求める問題	2	0.06	0.24	1.41	0.73	10.75	***
円の通過領域の図形を調べる問題	1	0.53	0.50	0.79	0.40	2.18	*
円の通過領域の面積を求める問題	2	0.18	0.38	1.03	0.89	5.03	***
通過領域の面積の求め方を表現する問題	2	0.00	0.00	1.71	0.71	13.83	***

N=35 * p < .05 ** p < .01 *** p < .001

ウ 分析・考察

授業実践Ⅰの生徒の感想には、主に「図形がコンピュータだときれいでありやすかった」と記入されていた。また、数学に関する意識調査の「課題解決をするためコンピュータを利用する授業に興味がある」の項目で有意差が見られたことから、グラフ作成用ソフトウェアの有用性を理解したと考えられる。一方、事後の単元テストでは、線分の通過領域の面積を求める問題で式を立てて正解した生徒が21名、円の通過領域の面積を求める問題で式を立てて正解した生徒が14名であったが、解答を導くまでの考え方が記述できていた生徒はそれぞれ2名、3名とわずかであった。そこで授業実践Ⅱでは、種々の図形問題において、根拠を明らかにして問題を解く過程での考え方を表現する学習活動をさらに重視し実践することにした。

4 問題を解く過程の考えを言葉で表現させる授業実践Ⅱ

(1) 授業実践Ⅱの概要

本校普通科2年A組40名を対象に、単元「空間座標とベクトル」の演習として実践を行った。グラフ作成用ソフトウェアを使って生徒にコンピュータを操作させ、読みとれるものをすべて書き出し判断させ、説明文にしていくという情報活用の実践力の視点を取り入れた学習活動を行う(図3)。

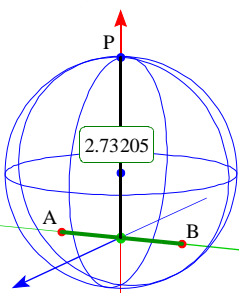
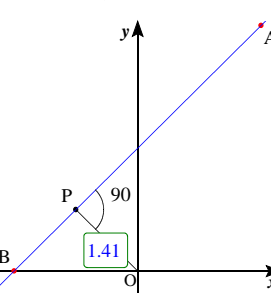
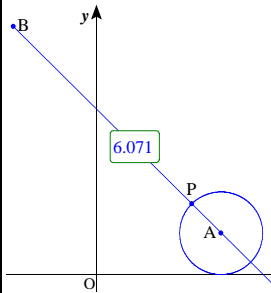
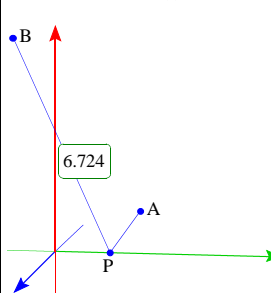
問題	$\triangle PAB$ の面積の最大値を求める問題	原点に最も近い直線AB上の点の座標を求める問題	点Bと円上の点の最短距離を求める問題	$AP+BP$ を最小にする点Pの座標を求める問題
コンピュータの操作(情報の収集)	高さが最大となるところで操作を止める 	OPの長さが最小となるところで操作を止める 	BPの長さが最小となるところで操作を止める 	$AP+BP$ の長さが最小となるところで操作を止める 
読み取れるものを書く(判断)	点P, 直線AB, 垂線, 球の中心	原点, 直線AB, 垂線, 交点	円の中心, 点B, 線分, 円の交点	点Bと対称な点をC, 線分AC, 平面 $z=0$ の交点
説明文の作成(表現)	Pから直線ABに下ろした垂線が球の中心を通るとき	原点から直線ABに垂線を下ろしたときの交点	円の中心と点Bを結ぶ線分と円の交点	平面 $z=0$ に関して点Bと対称な点をCとすると, 点Pは線分ACと平面 $z=0$ の交点である

図3 授業実践Ⅱにおける情報活用の実践力の視点を取り入れた学習

(2) 授業の様子

問題を解決できたところでコンピュータの操作を止めさせ、根拠を明らかにして表現させるた

めに、コンピュータから読み取れるものをすべて書き出し、必要な情報を主体的に収集・判断させ、説明文にしていくという学習活動を行った（図4）。その結果、説明文の作成に必要な情報が欠けた表現だったものが、コンピュータから読み取った情報を加えることで相手に正確に伝わる表現にすることができた。

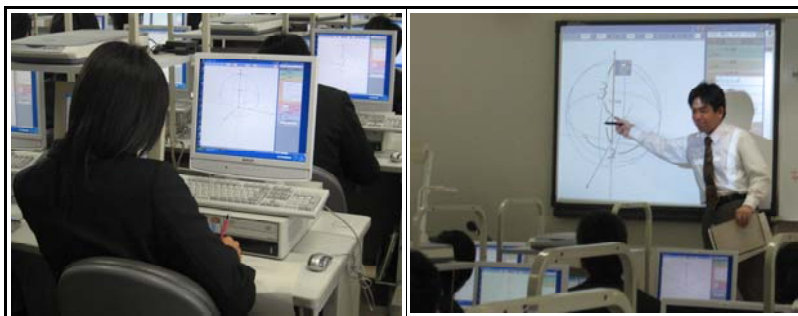


図4 コンピュータから読み取れるものを書き出し説明文にする

(3) 授業実践Ⅱの結果及び分析・考察

ア 意識調査の結果

数学に関する意識調査を授業実践Ⅰの前（1回目）、授業実践Ⅰの後（2回目）、授業実践Ⅱの後（3回目）で行い、情意レベルの高い選択肢から4・3・2・1点で得点化した。ボンフェローニの方法による多重比較の結果、1回目と2回目、1回目と3回目では表1に示した12の調査項目のうち番号1, 3, 12の3項目で有意差が見られた。

イ 事前・事後の単元テストの結果

事前・事後の単元テストの配点を表4のように定めた。事前・事後の単元テスト8題のうち4題は、実践授業Ⅱで行った問題の数値を変えた問題にし、残りの4題は平面図形の問題を空間におけるxy平面上の図形問題に置き換えたり、空間におけるyz平面上の図形問題を平面図形の問題に置き換えたりにした。t検定を行ったところ8題の問題すべてに有意差が見られた（表4）。また、事前・事後の単元テストで、図形のイメージが形成できているかを見るために、図を描いていた場合1点、図を全く描いていなければ0点として、t検定を行ったところ、すべてに有意差が見られた（表5）。

表4 事前・事後の単元テストの結果

問題分類	配点	事前		事後		有意差検定	
		平均	標準偏差	平均	標準偏差	t 値	結果
△PABの面積が最大となるときを説明文にする問題	2	0.06	0.23	1.40	0.80	9.90	***
△PABの面積の最大値を求める問題	2	0.29	0.70	1.63	0.72	8.20	***
原点に最も近い直線AB上の点を説明文にする問題	2	0.63	0.80	1.94	0.33	9.34	***
原点に最も近い直線AB上の点の座標を求める問題	2	0.66	0.92	1.46	0.65	4.63	***
点Bに最も近い円上の点を説明文にする問題	2	0.09	0.37	1.43	0.87	8.77	***
点Bと円上の点との最短距離を求める問題	2	0.00	0.00	1.51	0.81	10.95	***
AP+PBを最小にする点Pを説明文にする問題	2	0.14	0.42	1.20	0.86	6.46	***
AP+PBを最小にする点Pの座標を求める問題	2	0.11	0.46	0.80	0.79	4.88	***

N=35 *** p < .001

表5 事前・事後の単元テストで図を描いていた生徒の結果

図の分類	配点	事前		事後		有意差検定	
		平均	標準偏差	平均	標準偏差	t 値	結果
△PABの面積が最大となるときを表した図	1	0.29	0.46	0.54	0.50	2.31	*
原点に最も近い直線上の点を表した図	1	0.45	0.50	0.74	0.44	2.95	**
点Bと円上の点との最短距離を表した図	1	0.11	0.32	0.57	0.49	4.43	***
AP+PBを最小にする点Pを表した図	1	0.20	0.40	0.66	0.47	5.35	***

N=35 ** p < .05 ** p < .01 *** p < .001

ウ 分析・考察

授業実践Ⅱの前後で単元テストを行い、8題のうち4題は上記イで記述したように見方を変えた問題にした。説明文にする問題では、表6のように事前の単元テストでは記述できていなかったのが、事後の単元テストでは数学の用語や記号を使った文章表現にすることができるようになった。点Bと円上の点との最短距離を求める問題で授業実践Ⅱでは平面図形の問題にしていたが、単元テストでは空間における図形問題に置き換えた。事後の単元テストでは25名の生徒が空間に

おける2点間の距離公式を用いて最短距離を求めることができている、このうち21名が説明文も書いていた。また、 $AP + BP$ の長さの最小値を求める問題で授業実践Ⅱでは空間における問題にしていたが、単元テストでは平面図形に置き換えた。事後の単元テストでは19名の生徒が、図3の説明文の作成で「平面 $z = 0$ 」を「 x 軸」に変えて解答できており、このうち17名が説明文も書いており、答えを導くまでの過程も正しく記述できていた。これは、表5にも示されているように、授業実践Ⅱの前は図を描いて問題を解くことができていなかった生徒が、授業実践Ⅱの後では図を描いたことで、問題が解けるようになったからだと考えられる。授業の感想では「図が分かりやすかった」「楽しかった」と主に記入されていた。しかし、「コンピュータを使わなくても黒板を使ってすればもう少し速く問題を解けると思う」と記入していた生徒もおり、ICTを活用した学習活動について今後も検討していく必要があると感じた。

表6 事前・事後の単元テストで生徒が記述した説明文の比較（抜粋）

事前の単元テスト	事後の単元テスト
(記載なし)	円の中心と点Bを結ぶ線分と円Cとの交点である
(記載なし)	線分AB上に点Pがあり、A、P、Bが一直線上にあるとき
(記載なし)	円の中心と点Bを通る直線が円Cと交わる点
(記載なし)	線分ABと円Cとが交わる点
(記載なし)	円C上の点と点Bを結ぶ直線が円の中心を通るとき
(記載なし)	円の中心と点Bを結んだとき、円C上で交わる点
(記載なし)	円の中心と点Bを結んだ線分と円C上との交点
A、Bの点をとり距離を求める	円の中心と点Bを結ぶ線分と円Cとの交点である
(記載なし)	点Bをx軸に関して対称移動した点をCとすると、直線ACがx軸と交わる点
(記載なし)	点Bをx軸に関して対称移動した点をCとすると、Pが直線AC上にあるとき
(記載なし)	点Bとx軸について対称な点をCとし、ACとx軸の交点が点P
(記載なし)	点Bとx軸対称の点Cをとり、直線ACとx軸の交点
(記載なし)	点Bとx軸について対称な点をCとすると、 $AP + PB$ を最小にする点Pは直線ACとx軸の交点
(記載なし)	点Bとx軸について対称な点をCとすると、線分ACとx軸との交点
(記載なし)	点Bをx軸について対称に移動した点をCとする。線分ACとx軸が交わる点がP
(記載なし)	点Bをx軸に関して対称移動した点と点Aを結ぶ直線とx軸との交点
(記載なし)	x軸に関して点Bと対称な点Cと、点Aを結んだ直線がx軸と交わる点
(記載なし)	x軸に関して点Bと対称な点をB'とおくと、点Pは線分AB'上の点
(記載なし)	x軸について点Bと対称な点をB'とすると、点Pは線分AB'とx軸の交点
(記載なし)	x軸に関して点Bと対称な点をCとすると、線分ACとx軸が交わる点
(記載なし)	x軸に関して点Bと対称にとった点をCとすると、線分ACとx軸の交点である
A、P、Bが一直線上にあるとき	点Aと直線 $y = 0$ について対称である点をCとすると、直線 $y = 0$ と直線BCの交点

V 結論と課題

1 結論

本研究では高等学校数学の図形問題において、実験・観察アプローチを参考にICTを活用し、集めた情報を分析・整理する学習活動をすることで、生徒の言葉や式で表現する力が高まったことが示唆された。

2 課題

授業実践Ⅰで通過領域の面積の求め方を言葉や式で表現させるときに、必要な数学の用語を思い出すことができなく、言葉を引き出すことの難しさを感じた。今後は、ICTを活用する場面や言葉を引き出す発問の仕方を更に吟味していく必要があると考える。また、高等学校の数学の図形問題に絞って授業実践を行ったので、別の単元で、ICTを活用することや情報活用の実践力を高める学習指導を取り入れて、言葉や式で表現する力を伸ばす方法について今後も探していきたい。

○引用文献

- 1) 佐伯昭彦ほか(1997)「テクノロジーを活用した新しい数学教育」明治図書
- 2) 前掲書1)

○Webページ

- 7) 文部科学省(2008)：高等学校学習指導要領案
(http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/news/081223/002.pdf)